Exercice 3 **5 points**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$, on considère les points

$$A(0\,;\,4\,;\,16),\quad B(0\,;\,4\,;\,-10),\quad C(4\,;\,-8\,;\,0)\quad \text{et}\quad K(0\,;\,4\,;\,3).$$

On définit la sphère S de centre K et de rayon 13 comme l'ensemble des points M tels que KM = 13.

1. **a.** Vérifier que le point C appartient à la sphère S

   b. Montrer que le triangle ABC est rectangle en C.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

3. On admet que la sphère S coupe l'axe des abscisses en deux points, l'un ayant une abscisse positive et l'autre une abscisse négative.

   On note D celui qui a une abscisse positive.

   a. Montrer que le point D a pour coordonnées $(12\,;\,0\,;\,0)$.

   b. Donner une représentation paramétrique de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (ABC).

   c. Déterminer la distance du point D au plan (ABC).

4. Calculer une valeur approchée, à l'unité de volume près, du volume du tétraèdre ABCD.

   On rappelle la formule du volume V d'un tétraèdre

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h.$$

   où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur associée.